13　不定方程式

93

(1)

$$x=\frac{-13y+1111}{7}$$
$$=\frac{-14y+y+158\cdot 7+5}{7}$$
$$=-2y+158+\frac{y+5}{7}$$

より，

$7x+13y=1111$　・・・①　の解の 1 つは $x=155,\ y=2$

すなわち $7\cdot 155+13\cdot 2=1111$　・・・②

①－②より， $7(x-155)+13(y-2)=0$　$\therefore 7(x-155)=13(-y+2)$

7 と 13 は互いに素だから，一般に，整数 k を用いて， $x-155=13k,\ -y+2=7k$

すなわち $x=13k+155,\ y=-7k+2$ と表せる。 $13k+155>0$ かつ $-7k+2>0$

よって，k は $-11-\frac{12}{13}<k<\frac{2}{7}$ を満たす整数, すなわち $-11,\ -10,\ \cdots,\ 0$ の 12 個の整数である。

ゆえに，①を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は 12 個ある。

(2)

(1)より， $x=13k+155,\ y=-7k+2$

よって， $s=-(13k+155)+2(-7k+2)=-27k-151$

これと k は -11 以上 0 以下の整数より，

$-27k-151$ は $k=-11$ で最大値 146 を， $k=0$ で最小値 -151 をとる。

よって， s の最大値は 146，最小値は -151

(3)

(2)と同様にして， $t=|2x-5y|=|61k+300|$

k は -11 以上 0 以下の整数だから， $61k+300$ は -371 以上 300 以下の整数である。

よって， $|61k+300|$ は $k=-11$ で最大値 371 をとる。

また， $k=-5$ のとき $61k+300=-5$， $k=-4$ のとき $61k+300=56$ より，

$|61k+300|$ は $k=-5$ で最小値 5 をとる。

ゆえに， t の最大値は 371，最小値は 5

94

(1)

解法 1

与式右辺を x について整理すると， $P = x^2 - (y-1)x - 2y^2 + 10y - k$

これが $(x-2y+a)(x+y+b)$ に因数分解されたとすると，

$(x-2y+a)(x+y+b) = x^2 - \{y-(a+b)\}x + -2y^2 + (a-2b)y + ab$ より，

$x^2 - (y-1)x - 2y^2 + 10y - k = x^2 - \{y-(a+b)\}x + -2y^2 + (a-2b)y + ab$

よって， $\begin{cases} a+b=1 \\ a-2b=10 \\ ab=-k \end{cases}$

これを解くことにより， $a=4$， $b=-3$， $k=12$

よって， $k=12$， $P=(x-2y+4)(x+y-3)$

解法 2

$$\begin{aligned} P &= x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - k \\ &= x^2 - (y-1)x - 2y^2 + 10y - k \\ &= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 2y^2 + 10y - k \\ &= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 - \frac{9y^2 - 42y + 4k + 1}{4} \\ &= \left(\frac{2x-y+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3y-7}{2}\right)^2 + k - 12 \\ &= \left(\frac{2x-y+1}{2} + \frac{3y-7}{2}\right)\left(\frac{2x-y+1}{2} - \frac{3y-7}{2}\right) + k - 12 \\ &= (x+y-3)(x-2y+4) + k - 12 \end{aligned}$$

よって， $k=12$， $P=(x-2y+4)(x+y-3)$

(2)

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - 18 &= (x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - 12) - 6 \\ &= (x+y-3)(x-2y+4) - 6 \end{aligned}$$

より， $(x+y-3)(x-2y+4) - 6 = 0$

すなわち $(x+y-3)(x-2y+4) = 6$

ここで， $\begin{cases} x+y-3=a \\ x-2y+4=b \end{cases}$ （a, b は整数）とおくと， $x = \dfrac{2a+b+2}{3}$， $y = \dfrac{a-b+7}{3}$， $ab=6$

よって， $(a, b) = (2, 3), (6, 1)$ で， $(x, y) = (3, 2), (5, 4)$

95

(1)

$3x^2-2xy+2y^2-2x+y-1=3x^2-2(y+1)x+2y^2+y-1$ より，

$3x^2-2(y+1)x+2y^2+y-1=0$

これを x についての 2 次方程式と見なし，判別式を D とすると，

実数解条件より，$D\geq 0$

これと，$\dfrac{D}{4}=(y+1)^2-3(2y^2+y-1)=-(5y^2+y-4)=-(y+1)(5y-4)$ より，

$(y+1)(5y-4)\leq 0$

よって，$-1\leq y\leq \dfrac{4}{5}$

(2)

(1)より，$y=-1,\ 0$

$y=-1$ のとき

$3x^2-2(y+1)x+2y^2+y-1=0$ は $3x^2=0$ となり，これより，$x=0$

$y=0$ のとき

$3x^2-2(y+1)x+2y^2+y-1=0$ は $3x^2-2x-1=0$ すなわち $(3x+1)(x-1)=0$ となり，

これより，$x=1$

よって，$(x,\ y)=(0,\ -1),\ (1,\ 0)$

96

$n=3x+7y$ の形で表せない自然数 n

解法 1

$3\cdot(-2)+7\cdot 1=1$ より，$3\cdot(-2n)+7\cdot n=n$

これと $3x+7y=n$ の各辺の差をとると，$3(x+2n)+7(y-n)=0$　$\therefore 3(x+2n)=7(-y+n)$

3 と 7 は互いに素だから，整数 k を用いると，$x+2n=7k,\ -y+n=3k$

よって，$n=3x+7y$ の解は $x=-2n+7k,\ y=n-3k$

$x,\ y$ は負でない整数だから，$-2n+7k\geq 0$ かつ $n-3k\geq 0$

よって，$3k\leq n\leq \dfrac{7}{2}k$

n は自然数だから，$k\geq 1$

また，$\dfrac{7}{2}k\geq 3(k+1)$ すなわち $k\geq 6$ を満たす任意の自然数 n は負でない整数 $x,\ y$ で表せる。

よって，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ で調べればよい。

$k=1$ のとき　$3\leq n\leq \dfrac{7}{2}$

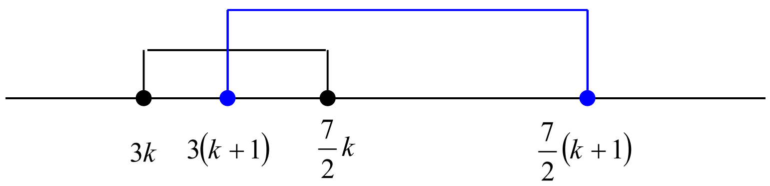
$k=2$ のとき　$6\leq n\leq 7$

$k=3$ のとき　$9 \leq n \leq \frac{21}{2}$

$k=4$ のとき　$12 \leq n \leq 14$

$k=5$ のとき　$15 \leq n \leq \frac{15}{2}$

よって，求める自然数は $1, 2, 4, 5, 8, 11$



解法 2

$3x+7y=3(x+2y)+y$ より，

$y=0$ のとき $3x+7y=3x$

$y=1$ のとき $3(x+2)+1$

$y=2$ のとき $3(x+4)+2$

よって，負でない整数 x, y を用いて，3 以上のすべての 3 で割り切れる数，7 以上のすべての 3 で割って 1 余る数，14 以上のすべての 3 で割って 2 余る数を表すことができる。

ゆえに，求める自然数は $1, 2, 4, 5, 8, 11$

$2008=3x+7y$ を満たす正の整数 x, y の組の個数

解法 1 の $x=-2n+7k,\ y=n-3k$ に $n=2008$ を代入すると，

$x=-4016+7k,\ y=2008-3k$

$x \geq 1,\ y \geq 1$ より，$-4016+7k \geq 1,\ 2008-3k \geq 1$

よって，k は 574 以上 669 以下の整数

ゆえに，求める組の個数は 96

97

整数l，m，nが満たすべき条件は，$7l+9m+12n=54$，$l\geq 0$，$m\geq 0$，$n\geq 0$

これより，$7l+9m=54-12n\geq 0$

よって，$n=0$，1，2，3

ここで，kを整数とする。

$n=0$のとき

$7l+9m=54$より，$7l=9(-m+6)$

7と9は互いに素だから，$l=9k$，$-m+6=7k$すなわち$m=-7k+6$

よって，l，m，nが満たすべき条件から，$(k,\ l,\ m)=(0,0,\ 6)$

$n=1$のとき

$7l+9m=42$より，$7l=3(-3m+14)$

7と3は互いに素だから，$l=3k$，$-3m+14=7k$すなわち$m=\dfrac{-7k+14}{3}$

よって，l，m，nが満たすべき条件から，$(k,\ l,\ m)=(2,\ 6,\ 0)$

$n=2$のとき

$7l+9m=30$より，$7l=3(-3m+10)$

7と3は互いに素だから，$l=3k$，$-3m+10=7k$すなわち$m=\dfrac{-7k+10}{3}$

よって，l，m，nが満たすべき条件から，$(k,\ l,\ m)=(1,\ 3,\ 1)$

$n=3$のとき

$7l+9m=18$より，$7l=9(-m+2)$

7と9は互いに素だから，$l=9k$，$-m+2=7k$すなわち$m=-7k+2$

よって，l，m，nが満たすべき条件から，$(k,\ l,\ m)=(0,\ 0,\ 2)$

$n=4$のとき

$7l+9m=6$より，$7l=3(-3m+2)$

7と3は互いに素だから，$l=3k$，$-3m+2=7k$すなわち$m=\dfrac{-7k+2}{3}$

l，m，nが満たすべき条件から，$3k\geq 0$かつ$-7k+2\geq 0$より，$k=0$

このとき，$m=\dfrac{2}{3}$となり，不適

以上より，

$(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0)$，$(6,\ 0,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 2)$，$(0,\ 2,\ 3)$

98

(1)

$c=1$ のとき，$1+\frac{1}{c}=2$ より，$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1$ でなければならない。

ところが，$1+\frac{1}{a}>1$，$1+\frac{1}{b}>1$ より，$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)>1$ である。

よって，$c=1$ のとき，①を満たす正の整数 a，b の組は存在しない。

(2)

$c=2$ のとき，$1+\frac{1}{c}=\frac{3}{2}$ より，$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{3}$

両辺に $3ab$ を掛けると，$3(a+1)(b+1)=4ab$

これを展開し，整理すると，$ab-3a-3b-3=0$ より，$(a-3)(b-3)=12$

これと，$a-3\geq b-3\geq -2$ より，$(a-3,\ b-3)=(12,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(4,\ 3)$

よって，$(a,\ b)=(15,\ 4)$，$(9,\ 5)$，$(7,\ 6)$

(3)

$a\geq b\geq c>0$ より，$\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$

よって，$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\leq\left(1+\frac{1}{c}\right)^3$ より，$\left(1+\frac{1}{c}\right)^3\geq 2$ ・・・②

これと $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3$ が正の値をとりながら単調に減少することから，

②を満たす c の値は 1，2，3

$c=1$ のとき

(1)より，①を満たす正の整数 a，b の組は存在しない。

$c=2$ のとき

(2)より，①を満たす正の整数 a，b の組は $(a,\ b)=(15,\ 4)$，$(9,\ 5)$，$(7,\ 6)$

$c=3$ のとき

$1+\frac{1}{c}=\frac{4}{3}$ より，$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}$

両辺に $2ab$ を掛けると，$2(a+1)(b+1)=3ab$

これを展開し，整理すると，$ab-2a-2b-2=0$ より，$(a-2)(b-2)=6$

これと，$a-2\geq b-2\geq -1$ より，$(a-2,\ b-2)=(6,\ 1)$，$(3,\ 2)$

よって，$(a,\ b)=(8,\ 3)$，$(5,\ 4)$

以上より，

$(a,\ b,\ c)=(15,\ 4,\ 2)$，$(9,\ 5,\ 2)$，$(7,\ 6,\ 2)$，$(8,\ 3,\ 3)$，$(5,\ 4,\ 3)$

99

解法 1

$1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ と仮定すると，$abcd \leq 4d$ より，$d(abc-4) \leq 0$

これと $d \geq 1$ より，$abc \leq 4$

よって，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1, 2, 2\ ),\ (1,\ 1,\ 4)$

これと $abcd=a+b+c+d$ かつ $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$

a, b, c, d の他の大小関係も考慮することにより，

$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 4,\ 2.\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 4),$
$(4,\ 1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 1),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1)$

解法 2

$1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ と仮定すると，$abcd \leq 4d$ より，$abc \leq 4$　・・・①

これと $a^3 \leq abc$ より，$a^3 \leq 4$　$\therefore a=1$

これと①および $b^2 \leq bc,\ 1 \leq b$ より，$1 \leq b^2 \leq 4$

よって，$b=1,\ 2$

$a=b=1$ のとき

$cd=2+c+d$ より，$(c-1)(d-1)=3$　$\therefore (c-1,\ d-1)=(1,\ 3)$　$\therefore c=2,\ d=4$

これは $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$

$a=1,\ b=2$ のとき

$2cd=3+c+d$ より，$(2c-1)(2d-1)=7$　$\therefore (2c-1,\ 2d-1)=(1,\ 7)$　$\therefore c=1,\ d=4$

これは $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ を満たさない。よって，不適

以上より，$1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ のとき，$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$

a, b, c, d の他の大小関係も考慮することにより，

$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 4,\ 2.\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 4),$
$(4,\ 1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 1),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1)$

100

(1)

$x^2-y^2=p$，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ より，$(x+y)(x-y)=p$

これと，$p>0$，$x+y>0$，$x+y>x-y$ より，$\begin{cases} x+y=p \\ x-y=1 \end{cases}$ $\therefore x=\dfrac{p+1}{2}$，$y=\dfrac{p-1}{2}$

(2)

$x^3-y^3=p>0$，$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ より，$(x-y)(x^2+xy+y^2)=p$

ここで，$x^2+xy+y^2-(x-y)=x^2+y^2+(x+1)(y-1)+1>0$ より，$x^2+xy+y^2>x-y$

また，$p>0$，$x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2>0$，

よって，$x-y=1$ すなわち $x=y+1$ ・・・① $x^2+xy+y^2=p$ ・・・②

②に①を代入すると，$(y+1)^2+(y+1)y+y^2=p$ すなわち $p=3y^2+3y+1$

これより，$p=3y(y+1)+1$

$y(y+1)$ は連続する 2 つの整数の積だから，2 の倍数である。

したがって，$3y(y+1)$ は 6 の倍数である。

よって，p を 6 で割った余りは 1 となる。

(3)

$(x,\ y)=(y+1,\ y)$，$x^3-y^3=3y(y+1)+1$ より，

$(x,\ y)=(2,\ 1)$ のとき

$x^3-y^3=7$ $\therefore p_1=7$

$(x,\ y)=(3,\ 2)$ のとき

$x^3-y^3=19$ $\therefore p_2=19$

$(x,\ y)=(4,\ 3)$ のとき

$x^3-y^3=37$ $\therefore p_3=7$

$(x,\ y)=(5,\ 4)$ のとき

$x^3-y^3=61$ $\therefore p_4=61$

$(x,\ y)=(6,\ 5)$ のとき

$x^3-y^3=91=7\cdot 13$ よって，不適

$(x,\ y)=(7,\ 6)$ のとき

$x^3-y^3=127$ $\therefore p_5=127$

よって，$p_5=127$